b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2°/$U_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\sqrt{1-x^2}\,dx$ on pose : $\begin{cases} u' = -2x\sqrt{1-x^2} \\ v = -\frac{x^{n+1}}{2} \end{cases}$ et

$\begin{cases} u = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \\ v' = -\frac{(n+1)x^n}{2} \end{cases}$

$U_{n+2} = [-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\frac{-x^{n+1}}{2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{-(n+1)}{2}x^n(1-x^2)^{3/2}dx$

d'où $U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx =$

$\frac{(n+1)}{3}\int_0^1 (x^n\sqrt{1-x^2} - x^{n+2}\sqrt{1-x^2})dx$

$U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3}(U_n - U_{n+2})$ soit $U_{n+2} = \frac{n+1}{3}U_n - \frac{n+1}{3}U_{n+2}$ d'où U_{n+2}

$+\frac{n+1}{3}U_{n+2} = \frac{n+1}{3}U_n$

ainsi $(n+4)U_{n+2} = (n+1)U_n$ donc pour tout $n \in IN$: $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}U_n$

3°/ Soit $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

a) * g est continue sur [-1,1]

* $0 \in [-1,1]$, $\cos t \in [-1,1]$ pour tout $t \in IR$ donc $\Phi(t)$ est définie sur IR

b) Soit G une primitive de g sur [-1,1] alors pour tout $t \in IR$ on a : $\Phi(t) = G(\cos t) - G(0)$

Φ est dérivable sur IR (comme somme et composée de fonctions dérivables)

$\Phi'(t) = g(\cos t).(-\sin t)$ d'où $\Phi'(t) = -\sqrt{1-\cos^2 t}\,.\sin t = -|\sin t|\sin t$

c) $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\Phi'(t) = -\sin^2 t$ or $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

donc $-\sin^2 t = \frac{\cos 2t - 1}{2}$